Thema	Lösen von kubischen Gleichungen
Voraussetzungen	Ausklammern, Polynomdivision, Lösen von quadratischen Gleichungen

Polynomgleichungen dritten Grades werden auch als **Kubische Gleichungen** bezeichnet. Sie haben die allgemeine Form $a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$. a_0 ist das sog. **Absolutglied**.

Aufgabe & Lösung | **Erläuterungen**

1. Kubische Gleichung ohne Absolutglied.

a)

$$7x^3 - 7x^2 - 84x = 0$$
$$7x \cdot (x^2 - x - 12) = 0$$
$$7x = 0 \quad \vee \quad x^2 - x - 12 = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$$
$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -3 \quad \wedge \quad x_3 = 4$$

b)

$$-8x^3 - 40x^2 = 0$$
$$-8x^2 \cdot (x + 5) = 0$$
$$-8x^2 = 0 \quad \vee \quad x + 5 = 0$$
$$x_{1,2} = 0 \quad \wedge \quad x_3 = -5$$

Bei fehlendem Absolutglied a_0 kann die niedrigste x-Potenz ausgeklammert werden. Es empfiehlt sich, den Vorfaktor a_3 von x^3 mit auszuklammern.
Das entstehende Produkt wird nach dem **Nullproduktsatz** weiterbehandelt, indem man jeden Faktor einzeln gleich Null setzt:

Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist.

$$\overbrace{\underbrace{2\cdot 3}_{\text{Faktor} \cdot \text{Faktor}}}^{\text{Produkt}} = \underbrace{6}_{\text{Produktwert}}$$

Zur Bedeutung von mehrfachen Lösungen s.a. Funktionen, Kap. 1.3.6.

2. Kubische Gleichung mit Absolutglied.

$$2\,x^3 - 6{,}5\,x + 3 = 0 \quad |\cdot 2$$
$$4\,x^3 - 13\,x + 6 = 0$$
$$x_0 = \pm\frac{\text{Teiler}(6)}{\text{Teiler}(4)} = \pm\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{2}{1}; \cancel{\frac{2}{2}}; \cancel{\frac{2}{4}}; \frac{3}{1}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{6}{1}; \cancel{\frac{6}{2}}; \cancel{\frac{6}{4}}$$

Raten durch Ausprobieren: $x_1 = -2$

$$(4\,x^3 + 0x^2 - 13\,x + 6) : (x + 2) = 4x^2 - 8x + 3$$
$$\underline{-(4x^3 + 8x^2)}$$
$$-8x^2 - 13x$$
$$\underline{-(-8x^2 - 16x)}$$
$$3x + 6$$
$$\underline{-(3x + 6)}$$
$$0$$

$$4\,x^3 - 13\,x + 6 = 0$$
$$(x + 2) \cdot (4x^2 - 8x + 3) = 0$$
$$x + 2 = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad |\,\text{pq} - \text{Formel}$$
$$x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = 0{,}5 \quad \vee \quad x_3 = 1{,}5$$

Methode des gezielten Ratens

Die Wurzellösungsformel von CARDANO für Gleichungen dritten Grades ist für praktische Anwendungen zu kompliziert. Hier empfiehlt sich (gezieltes) Raten einer Lösung mit anschließender Polynomdivision.

Die Lösungskandidaten x_0 erhält man aus den Teilern des Absolutgliedes und dem Vorfaktor der höchsten Potenz:

$$x_0 = \pm\frac{\text{Teiler(Absolutglied)}}{\text{Teiler(Vorfaktor } x^3)} = \pm\frac{a_0}{a_3}$$

Man errät eine Lösung durch Ausprobieren und verringert dann den Grad des Polynoms durch eine Polynomdivision:

$$(x^3 \ldots) : (x - \text{geratene Lösung}) = x^2 \ldots$$

Diese Methode liefert sämtliche <u>rationalen</u> Lösungen!
<u>Beachte:</u> die Vorfaktoren müssen allesamt ganze Zahlen sein. Gegebenenfalls mit dem Hauptnenner multiplizieren.

Übungen

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
2. $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$
3. $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$
4. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
5. $x^3 + x^2 + 4x - 20 = 0$
6. $x^3 - 4x^2 - 11x + 48 = 0$
7. $x^3 + 4x + 5 = 0$
8.
9.
10.
11. $7x^3 + 51x^2 + 8x - 42 = 0$
12. $3x^3 + 6x^2 + 21x = 0$
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
36.
41.